Aufgabe 5. (a) Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gibt es eindeutig bestimmte $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(a,b) = 1.$$

(b) Sei $P = (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Wir sagen, dass P von $(0,0)$ aus *sichtbar* ist, wenn P und $(0,0)$ die einzigen Punkte auf der Verbindungsstrecke von $(0,0)$ und P sind. Zeigen Sie, dass P genau dann von $(0,0)$ aus sichtbar ist, wenn gilt $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$.

(Sie müssen/dürfen Eigenschaften der natürlichen Zahlen verwenden, die aus der elementaren Zahlentheorie bekannt sind.)

Definition. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ zwischen Ringen[1] R und S heißt *Ringhomomorphismus*, wenn für alle $r, r' \in R$ gilt: $f(1_R) = 1_S$, $f(r + r') = f(r) + f(r')$ und $f(rr') = f(r)f(r')$.

Aufgabe 6. (a) Benutzen Sie, dass $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist um zu zeigen: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ gilt

$$ac = bc \Rightarrow a = b.$$

(b) Sei K ein Körper, $R \neq \{0\}$ ein Ring und $f\colon K \to R$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist f injektiv.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus $j\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ gibt, und dass dieser injektiv ist.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$, gemeinsam mit der Abbildung $j\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ aus der vorhergehenden Aufgabe, die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt:

Ist K ein Körper und $f\colon \mathbb{Z} \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\overline{f}\colon \mathbb{Q} \to K$, so dass gilt $\overline{f} \circ j = f$.

(Nach Aufgabe 6 ist $\overline{f}$ dann auch injektiv.)

[1] Im Kontext dieser VO haben alle Ringe eine Eins und sind kommutativ.