Wir besprechen Aufgabe 15. Weiters:

Aufgabe 18. Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ sei $A^* := \overline{A}^T$ die adjungierte Matrix. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist *unitär* wenn gilt $AA^* = A^*A = 1$. Die *spezielle unitäre Gruppe* SU_n besteht aus allen unitären $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1. Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{H}^1$ und SU_2 isomorph sind.

(Aufgabe 16 sowie der Beweis des Isomorphismus $S^1 \cong \mathrm{SO}_2$ aus der VO könnten hilfreich sein.)

Aufgabe 19. Seien $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4 \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine explizite Formel um ein Produkt der Form $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ wieder als Summe von zwei Quadraten darzustellen.

(b) Finden Sie eine explizite Formel um ein Produkt der Form

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$$

als Summe von vier Quadraten darzustellen.

Hinweis: Die komplexen Zahlen bzw. die Quaternionen sind hilfreich (aber Euler hat es ohne diese geschafft).

Bonus: Zeigen Sie, dass es keine solche Produktformel für Summen von drei Quadraten gibt. (Finden Sie dazu natürliche Zahlen a, b, c mit $a = bc$, so dass b, c jeweils Summen von drei Quadraten sind, aber a nicht Summe von drei Quadraten ist.)