76. Durch die folgenden Terme sei jeweils eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ definiert (für geeignetes $D \subseteq \mathbb{R}$). Begründen Sie, warum f differenzierbar ist, und berechnen Sie f':

(a) $e^{2x}(x^2 - 2x + 2)$ (b) $\dfrac{1}{(1+x^3)\sqrt{1+x^2}}$ (c) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

(d) $\dfrac{e^{x^2} - 1}{e^x + 1}$ (e) $a^{x^x} \quad (a \in \mathbb{R}_+)$ (f) $x^{a^x} \quad (a \in \mathbb{R}_+)$

77. $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$) seien differenzierbar in $a \in D$.

(a) Bestimmen Sie
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

(b) Zeigen Sie: Ist $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$, so gilt
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

78. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, und D sei eine Umgebung von 0. Beweisen Sie:

(a) Gibt es ein $c > 1$, eine Umgebung U von 0 und eine beschränkte Funktion $g\colon U \to [0, \infty)$, so dass gilt
$$\forall x \in D \cap U\colon \quad |f(x)| \leq |x|^c g(x),$$
dann ist f differenzierbar an der Stelle 0 und es gilt $f'(0) = 0$.

(b) Ist $f(0) = 0$ und gibt es ein $c \in (0, 1)$ und eine Umgebung U von 0, so dass gilt
$$\forall x \in D \cap U\colon \quad |f(x)| \geq |x|^c,$$
so ist f nicht differenzierbar in 0.

79. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$
Untersuchen Sie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten von f. Bestimmen Sie weiters die Nullstellen, die lokalen Maxima und Minima, sowie die Bildmenge der Funktion und skizzieren Sie die Funktion.